ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 & 6 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & -7 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & -7 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$

Να βρεθεί ορθογώνιος P έτσι ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι ορθογώνιος

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \alpha & 3 & 0 \\ \beta & c & -2 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ διαγωνοποιείται.

α) Βρείτε τις σχέσεις μεταξύ των α, β, c

β) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A και χρησιμοποιήστε το για να βρείτε τον αντίστροφο του A

γ) Δείξτε ότι $A^{2014} = 7A^{2012} + 6A^{2011}$

ΘΕΜΑ 3

Εξετάστε αν ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα κάθετο σ' αυτό. Αν ναι, να προσδιορίσετε τον άξονα και την γωνία στροφής

ΘΕΜΑ 4

Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε την απεικόνιση $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $\langle(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\rangle = 2\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + 2\alpha_3\beta_3$

α) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle\ ,\ \rangle$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

β) Να ορίσετε ισομετρία $T:(\mathbb{R}_1[x]) \to (W, \langle\ ,\ \rangle)$ όπου ο $\mathbb{R}_1[x]$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερ. γινόμενο $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ και W είναι ο υποχώρος $\{(x,y,z) \mid x-2y-z=0\}$ του $\mathbb{R}^3$

ΘΕΜΑ 5: Να προσδιοριστεί το είδος της επίπεδης καμπύλης που ορίζεται απ' την εξίσωση: $5x^2+6xy-3y^2-22x+6y-20=0$